Actes de la XXI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2025) p. 98-111
DOI: 10.2436/10.2006.06.10

IDEAS HISTÓRICAS Y DIDÁCTICAS SOBRE LA CUADRATURA ARITMÉTICA DE JACQUES OZANAM (1640-1718)

PEDRO J. HERRERO PIÑEYRO;[1] ANTONIO LINERO BAS;[2] ANTONIO MELLADO ROMERO[3]
[1] IES BENIAJÁN, BENIAJÁN (MURCIA)
[2] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA
[3] IES LICENCIADO CASCALES (MURCIA)

Resumen: *La obra matemática de Jacques Ozanam (1640-1718) se desarrolló en una época de transformación de las matemáticas, motivada, entre otras, por la aplicación del análisis algebraico como método de resolución de problemas geométricos y aritméticos. En este proceso, llamado de algebrización de las matemáticas, fueron claves los trabajos de François Viète (1540-1603) y René Descartes (1596-1650), cuya influencia es notoria en la obra de Ozanam. Este fue un autor prolífico: publicó numerosos tratados sobre matemáticas puras y mixtas; escribió un curso matemático; hizo aportaciones al Journal des Sçavants… Su obra matemática se caracteriza por un lenguaje matemático avanzado, que relacionó geometría y álgebra, trasladando, por ejemplo, problemas puramente geométricos a relaciones algebraicas, que más tarde interpretaría como expresiones de ciertos lugares geométricos en el plano. En este trabajo, utilizaremos fuentes primarias de Ozanam para ilustrar el beneficio y la utilidad que puede tener el uso de la historia de las matemáticas en el aula. Consideramos la fórmula aritmética del área de un círculo de diámetro 1, a saber,* $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}....$

Palabras clave: *Historia y enseñanza de las matemáticas, actividades para el aula, siglo XVIII, algebrización, cuadratura aritmética, J. Ozanam, G. W. Leibniz.*

Idees històriques i didàctiques sobre la quadratura de Jacques Ozanam (1640-1718)

Resum: *L'obra matemàtica de Jacques Ozanam (1640-1718) es va desenvolupar en un període de transformació de les matemàtiques, motivada, entre altres, per l'aplicació de l'anàlisi algebraica com a mètode de resolució de problemes geomètrics i aritmètics. En aquest procés anomenat d'algebrització de les matemàtiques, varen ser claus els treballs de François Viète (1540-1603) i René Descartes (1596-1650), que varen influir notòriament en l'obra d'Ozanam. Aquest va ser un autor prolífic: va publicar nombrosos tractats sobre matemàtiques pures i mixtes; va escriure un* *curs matemàtic; va fer aportacions al Journal de Scavants… La seva obra matemàtica es caracteritza per un llenguatge matemàtic avançat, que va relacionar geometria i àlgebra, traslladant, per exemple, problemes purament geomètrics a relacions algebraiques, que més tard interpretaria com a expressions de certs llocs geomètrics en el pla. En aquest treball, emprarem fonts primàries d'Ozanam per il·lustrar el benefici i la utilitat que pot tenir l'ús de la historia de la matemàtica en l'aula. Considerem la fórmula aritmètica de l'àrea d'un cercle de diàmetre 1, és a dir* $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdots$

Paraules clau: *Història i ensenyament de les matemàtiques, activitats per a l'aula, segle XVIII, algebrització, quadratura aritmètica, J. Ozanam, G.W. Leibniz.*

Historical and didactic ideas about the arithmetic squarring by Jacques Ozanam (1640-1718)

Summary: *The mathematical work of Jacques Ozanam (1640-1718) took place at a time of transformation of mathematics, motivated, among other things, by the application of algebraic analysis as a method of solving geometrical and arithmetical problems. The work of François Viète (1540-1603) and René Descartes (1596-1650), whose influence on Ozanam's work is notorious, were key to this process, known as the algebrization of mathematics. Ozanam was a prolific author: he published numerous treatises on pure and mixed mathematics; he wrote a mathematical course; he contributed to the Journal des Sçavants... His mathematical work is characterised by an advanced mathematical language, which related geometry and algebra, translating, for example, purely geometric problems into algebraic relations, which he would later interpret as expressions of certain geometric places in the plane. In this paper, we will use Ozanam's primary sources to illustrate the benefit and usefulness of using the history of mathematics in the classroom. We consider the arithmetical formula for the area of a circle with a diameter of 1, namely,* $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdots$.

Keywords: *History and teaching of mathematics, room activities, 17th century, algebrization, arithmetic cuadrature, J. Ozanam, G.W. Leibniz.*

Introducción

Cuando empezamos un curso, indistintamente de su etapa educativa, es primordial captar el interés del alumnado. Las matemáticas se presentan a menudo como un producto pulido, tan bien definido que podría parecer que siempre han sido y serán como se exponen hoy en día. Esta impresión impide que el estudiante perciba que el constructo teórico que hoy se le brinda ha sido consecuencia del trabajo conjunto y la evolución de las ideas en sucesivas épocas de la historia. En parte con el objetivo de cuestionar esa idea preconcebida, creemos que la ayuda de la historia de las matemáticas en el aula puede resultar beneficiosa si se usa de modo apropiado. En las últimas décadas, se ha hecho un esfuerzo para que esta herramienta se pueda implementar en el aula,[1] incluso hay grupos de trabajo internacionales que cooperan en desarrollarla apropiadamente.[2]

Sobre los beneficios y contraindicaciones del recurso de la historia en el aula de matemáticas se ha debatido mucho.[3] En cuanto a las dificultades de su uso, entre otras, se alega que, si forman parte del currículo, los temarios se ampliarían todavía más, por lo que aumentaría la carga de trabajo de los alumnos; no queda claro tampoco cómo se podría evaluar el aprendizaje conseguido en clase, ni

1. Como ejemplo de estos materiales, véase Massa-Esteve (2014), donde la autora se sirve de la obra *Nova Scientia* (1537), de Tartaglia (c. 1499-1557), para motivar el estudio de la trigonometría en clase.

2. Por ejemplo, las conferencias bianuales CERME, organizadas por *European Society for Research in Mathematics Education*, http://erme.site, potencian la historia y la pedagogía de las matemáticas.

3. Por su visión general, consúltese Clark *et al.* (2018).

si es pertinente su evaluación; además, no todo el profesorado está formado en estas cuestiones históricas, ni quizás tenga el suficiente interés en esa formación, lo que supondría un esfuerzo adicional por su parte. No obstante, parece que los beneficios están claros: además de presentar una materia viva, en progreso y conectada con la sociedad y los problemas reales, fruto del trabajo de muchas generaciones de matemáticos, procuran una formación humanista, ya en desuso, y conforman una visión holística de la materia; se pueden emplear como punto de enganche en clase, para potenciar la curiosidad y la admiración de los estudiantes, sobre todo si somos capaces de presentar fuentes primarias que permitan hacernos una idea de la evolución de las matemáticas; su conocimiento puede ayudar a superar obstáculos epistemológicos en etapas iniciales, como ocurre, por ejemplo, con los conceptos de función o de tangente a una curva; incluso, pueden ser fuente de inspiración para plantear nuevas cuestiones, hasta el nivel superior.

Los siglos XVI y XVII constituyen una época de la historia de las matemáticas muy útil para poner de manifiesto todos los efectos beneficiosos de los que hemos hablado anteriormente: en esos siglos, hay un gran interés por la recuperación de los textos clásicos (Euclides, Apolonio, Arquímedes, Diofanto…), lo que incentiva nuevos métodos analíticos de descubrimiento en matemáticas; se desarrolla el proceso de algebrización de las matemáticas, que origina la transición de pensar las matemáticas desde un punto de vista más geométrico, imperante hasta entonces, hacia uno más algebraico, en el que son decisivas las figuras de François Viète (1540-1603) y René Descartes (1596-1650); el uso del infinito no se evita y aparecen distintos algoritmos infinitos, sobre todo en el ámbito de las cuadraturas numéricas.

Al adentrarse en cualquiera de los problemas en el cálculo de esa época (obtener la tangente a una curva; calcular máximos y mínimos de una función; obtener longitudes de curvas, áreas acotadas por curvas…), obtendremos material valiosísimo que nos sirva de apoyo para atraer la atención de nuestros alumnos, para hacerles comprender el origen de las ideas y procedimientos algebraicos que actualmente usamos, y para intentar salvar las reticencias y los obstáculos de aprendizaje que puedan surgir al enfrentarse con estos temas.

En el presente trabajo, vamos a estudiar la cuadratura aritmética del círculo desarrollada por Jacques Ozanam (1640-1718) en su *Géométrie Pratique* (1684). Mostraremos los ingredientes que utilizó Ozanam para dar la prueba, que contiene, entre otros, progresiones, tanto aritméticas como geométricas, y series infinitas; de este estudio entresacaremos algunas actividades, pensadas para alumnos de educación secundaria o bachillerato e, incluso, para alumnos de un primer curso del grado en matemáticas o de un grado de ciencias.

Jacques Ozanam: vida y obra

La mayoría de los retazos biográficos nos ha llegado fundamentalmente a través del *Elogio de Fontenelle* (1657-1757) (Fontenelle, 1719). Otra fuente importante, también para su obra, es la referencia que hace Montucla (1725-1799) en su *Historia de las Matemáticas*, (Montucla, 1758). Sin duda por la cercanía del autor, descendiente directo de Jacques Ozanam, una obra que recoge abundante información sobre su vida es V*ie de Frédéric Ozanam: Professeur de littérature étrangère à la Sorbonne* (1879). En esta obra, dedicada a mayor gloria de Frédéric Ozanam (1813-1853),[4] su hermano

4. Fréderic Ozanam fue profesor de Derecho en la Universidad de Lyon, y profesor de lenguas extranjeras en la Universidad de la Sorbonne. En 1833 fundó, junto a un grupo de laicos católicos, la Sociedad de San Vicente de Paúl. Fue beatificado por S. Juan

Charles-Alphonse nos relata acontecimientos notables de miembros destacados de la saga familiar de los Ozanam, empezando precisamente con la figura de Jacques Ozanam. Nació J. Ozanam en Saint-Olive, Ain, en 1640. Inició estudios eclesiásticos con los jesuitas, en donde conoció a Claude Dechales (1621-1678) y a Jacques de Billy (1602-1679), pero a la muerte de su padre abandona esos estudios y se interesa por las matemáticas, a las que se dedicaría toda su vida, enseñándolas primero en Lyon, para más tarde continuar en París, donde llegó a ser miembro de la Real Academia de Ciencias de París en 1713. Murió en la capital francesa en 1718.

Según leemos en Gómez *et al.* (2021, 2023), la obra de Ozanam fue copiosa, con más de veinticinco tratados y cursos, reimpresiones, artículos en la revista *Journal de Savants*… Abarcó diferentes ámbitos como álgebra, geometría, matemáticas mixtas… incluso recreaciones matemáticas y físicas. Entre sus obras, paradójicamente, una de las que pudo haberle reportado más fama, por la pericia matemática que demuestra, es un manuscrito, una obra no publicada sobre la Aritmética de Diofanto (Ozanam, c. 1674).[5] Su obra matemática fue conocida y reconocida en vida del propio Ozanam.[6]

Sobre las características de la obra de Ozanam, recomendamos la lectura de Gómez *et al.* (2021, 2023). Por resumirlas muy brevemente, su obra matemática se caracteriza por un lenguaje matemático avanzado, que relaciona geometría y álgebra, trasladando, por ejemplo, problemas puramente geométricos a relaciones algebraicas, que más tarde interpreta como expresiones de ciertos lugares geométricos en el plano. Con su método matemático, fue capaz de obtener nuevos resultados, como ocurre con las numerosas adiciones que presentó en su manuscrito sobre la *Aritmética* de Diofanto (Gómez *et al.*, 2021).

La cuadratura aritmética del círculo por Jacques Ozanam

Como hemos comentado, la obra de Ozanam era conocida, y elogiada, por Leibniz. En uno de sus numerosos encuentros en la capital parisina, Leibniz lo introduce en la cuadratura aritmética del círculo de diámetro 1, a saber, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots$. Con esas indicaciones de Leibniz, Ozanam fue capaz de encontrar una demostración propia para tal cuadratura, que presentó en su *Géométrie Pratique* de 1684 (Ozanam, 1684).

Indiquemos que en este tratado aparece por primera vez en imprenta, en 1684, la demostración de la cuadratura aritmética del círculo de diámetro 1, conocida actualmente como cuadratura aritmética de Leibniz.

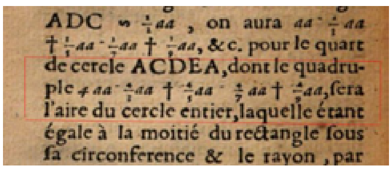

ADC ∞ $\frac{1}{1}aa$, on aura $aa - \frac{1}{3}aa$
$+ \frac{1}{5}aa - \frac{1}{7}aa + \frac{1}{9}aa$, &c. pour le quart
de cercle ACDEA, dont le quadru-
ple $4aa - \frac{4}{3}aa + \frac{4}{5}aa - \frac{4}{7}aa + \frac{4}{9}aa$, ſera
l'aire du cercle entier, laquelle étant
égale à la moitié du rectangle ſous
ſa circonference & le rayon, par

Figura 1. Fórmula de cuadratura aritmética del cículo de radio *a*.
Fuente: Ozanam, 1684: 198. El subrayado es nuestro.

Pablo II en agosto de 1997.

5. Para más información sobre el manuscrito, véase (Gómez *et al.*, 2021).

6. Por ejemplo, el propio Leibniz (1646-1716) alabó el tratado sobre nuevos elementos de Álgebra de Ozanam publicado en 1702 (Leibniz, 1703).

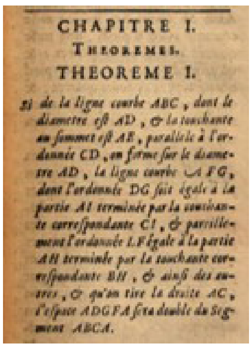
La autoría se asigna, con razón, a Leibniz, quien, en su estancia en París, redacta en 1676 el manuscrito *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, en donde demostró la fórmula, que no llegaría a publicarse hasta tres siglos más tarde, en 1993 (Leibniz, 1993). Esto hizo que entre Leibniz y Ozanam surgiera una disputa epistolar por la autoría de la demostración:[7] efectivamente, Ozanam reconoció que Leibniz le abrió el camino para conseguir la prueba, pero viendo que no lograba conseguir que Leibniz le diera la demostración, con las indicaciones iniciales fue capaz de hilvanar su propia prueba.

Cuadratura aritmética del círculo por Ozanam. Teoremas previos

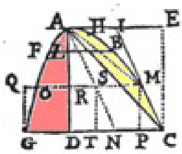
La cuadratura aritmética aparece en el Teorema VII,[8] dentro del capítulo dedicado a la planimetría, en la *Géométrie Pratique*, p. 192-200. En dicho teorema, Ozanam encuentra la cuadratura aritmética para el área del círculo de diámetro 2*a*, es decir, para πa^2 , cuya aplicación se usará para dar las aproximaciones mencionadas en el enunciado. Para llegar al resultado, Ozanam prepara el camino con seis teoremas previos que pasamos a describir brevemente. El primer teorema establece un resultado general para cuadrar una línea curva, igualándola al doble del área de un cierto segmento:

> Teorema I. Si a partir de la línea curva ABC (cuyo diámetro es AD y la tangente en el punto máximo es AE, paralela a la ordenada CD), se forma sobre el diámetro AD la línea curva AFG, de modo que: su ordenada DG sea igual a la parte AI terminada [interceptada] por la tangente correspondiente CI [junto con la recta AE], y similarmente la ordenada LF [sea] igual a la parte AH terminada por la tangente correspondiente BH, y así con las otras, y si se traza la recta AC, [entonces] el espacio ADGFA [color salmón, ver Figura 2] será el doble que el segmento ABCA [color amarillo].

En la prueba de este resultado se usa geometría elemental sobre paralelogramos, basada en el Libro I de los Elementos de Euclides. Según Ozanam, «este teorema es de gran utilidad, como veréis a continuación; todavía no nos hemos enterado de que nadie lo haya demostrado de forma tan general como nosotros».[9]


CHAPITRE I.
THEOREMES.
THEOREME I.

Si de la ligne courbe ABC, dont le diametre est AD, & la touchante au sommet est AE, parallele à l'ordonnée CD, on forme sur le diametre AD, la ligne courbe AFG, dont l'ordonnée DG soit égale à la partie AI terminée par la touchante correspondante CI, & pareillement l'ordonnée LF égale à la partie AH terminée par la touchante correspondante BH, & ainsi des autres, & qu'on tire la droite AC, l'espace ADGFA sera double du Segment ABCA.



(Los sombreados de colores son nuestros)

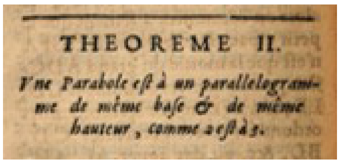
FIGURA 2. Enunciado del Teorema I .
FUENTE: Ozanam, 1684: 173.

7. La correspondencia epistolar aparece recogida en Foucher de Careil (1854). Para más detalles,véase también Gómez *et al* (2023).

8. THEOREME VII. *Le diametre d'un cercle est à sa circonference, environ comme 7 à 22, ou comme 100 à 314*. (Ozanam, 1684 : 192).

9. «Ce Theoreme est de grand usage, comme vous verrez dans la suite; & je n'ay pas encore appris que personne l'ait démontré si generalement que nous» (Ozanam, 1684 : 175-176).

El segundo teorema establece que la razón entre el área de una parábola y la de un paralelogramo de la misma base y altura es de 2/3 (véase la fig. 3). Su prueba es consecuencia del Teorema I y del conocimiento de las propiedades de las cónicas.[10]


THEOREME II.

Une Parabole est à un parallelogramme de même base & de même hauteur, comme 2 est à 3.

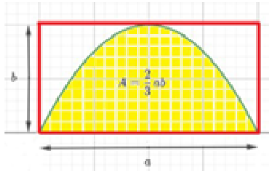


FIGURA 3. Enunciado del Teorema II e interpretación geométrica.
FUENTE: Ozanam, 1684: 176 (izquierda); elaboración propia (derecha).

El Teorema III establece cómo sumar series infinitas, empezando desde 0, con una cierta propiedad («en progresión aritmética continua»), y establece que la suma es igual a la mitad de la más grande multiplicada por el número que expresa la multitud de todas estas cantidades.[11]

Veamos brevemente la idea desarrollada por Ozanam: toma la suma de esas cantidades como el área de un triángulo, en cuyo vértice sitúa a **0** (la primera cantidad) y en cuya base coloca a la más grande, AC; la altura del triángulo se divide en una infinidad de partes iguales en las que se colocan, paralelamente a la base, el resto de las cantidades. Ozanam justifica su desarrollo a través de semejanzas de triángulos y del uso de la Proposición 41 del Libro I de los Elementos de Euclides sobre medidas de triángulos.

Como continuación, en el Teorema IV se nos va a proponer ahora cómo obtener la suma de infinitos cuadrados cuyos lados están en progresión aritmética, y se establece que es igual a un tercio del cuadrado más grande multiplicado por el número que expresa la multitud de esos cuadrados.[12]

Ozanam aporta dos demostraciones de esta propiedad: una, de corte parecido a la prueba del Teorema III, pero ahora basándose en el conocimiento del volumen de una pirámide de base cuadrada, en la que se divide su altura en una infinidad de partes iguales, teniendo la base el cuadrado más grande (véase la fig. 4); otra nueva prueba, razonando sobre una parábola plana ABC en la que se cuadra su área mediante líneas paralelas al eje AD de la parábola.

En nuestro lenguaje actual, lo que vemos es que Ozanam ha justificado la cuadratura

$$\int_o^\alpha bx^n dx = \frac{b\alpha^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot b\alpha^n \cdot \alpha$$

de manera geométrica, multiplicando $\frac{1}{n+1}$ por la potencia más grande, $b \cdot \alpha^n$, y por el número de términos que contiene la suma, en este caso, α .

10. Esta cuadratura de la parábola ya era conocida por Arquímedes, véase Heath (1897).

11. « THEOREME III. La somme des quantitiez infinies en continuelle proportion arithmetique en commençant depuis 0, est égale à la moitié de la plus grande multipliée par le nombre qui exprime la multitude de toutes ces quantitez » (Ozanam, 1684: 181). El propio Ozanam afirma que, obviamente, este teorema se cumple también en el caso finito, pero ahora, en lugar de tomar la cantidad más grande, se debe tomar la suma de la más grande con la más pequeña.

12. « THEOREME IV. La somme des quarrez infinies des quantitez en continuelle proportion arithmetique, en commençant depuis 0, est égal au tiers du plus grand quarré multiplié par le nombre qui exprime la multitude de ces quarrez » (Ozanam, 1684: 183).

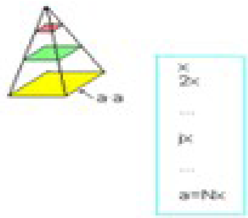


FIGURA 4. Cómo Ozanam entiende la suma de los cuadrados de números en progresión aritmética en el Teorema IV.
FUENTE: Elaboración propia.

A continuación, Ozanam nos presenta en el Teorema V la conocida expresión para el área de un polígono regular a través de los triángulos que lo componen: [El área de] Un polígono regular es la mitad del [área] del rectángulo bajo su circunferencia y la perpendicular, que va del centro a la mitad de uno de sus lados.[13] La prueba es puramente geométrica y se apoya en la Proposición 41 de los *Elementos* de Euclides.

Para terminar con los preparativos de la cuadratura aritmética del círculo, el sexto teorema establece el área de la circunferencia en términos del área de un determinado triángulo:

> Teorema VI. [El área de] Un círculo es la mitad de un rectángulo bajo [formado por] la circunferencia y su radio.[14]

La cuadratura aritmética del círculo por Ozanam: Teorema VII

Dentro de la prueba del Teorema VII, Ozanam describe y demuestra la cuadratura aritmética para el área del círculo de diámetro 2α, es decir, para $\pi\alpha^2$. Procede como sigue.

Construcción de la cuadratriz geométrica

Según Ozanam, desde el centro C del semicírculo ADB (ver Figura 5), se traza sobre el diámetro AB la perpendicular indefinida CD y desde el extremo B de ese mismo diámetro se traza una recta cualquiera BE, que corta

- a la perpendicular CD —prolongada cuando sea necesario— en F, y
- a la circunferencia del semicírculo en E;

se traza entonces por E una paralela indeterminada EG paralela a la línea CD; la recta EG terminará en un punto G de modo que IG sea igual a la parte correspondiente CF [es decir, si I es el punto del diámetro AB en el que la recta EG corta a dicho diámetro, se encuentra un punto G en la recta EG tal que IG=CF].

Como la recta BE se puede trazar de forma arbitraria, para tantos puntos E diferentes como se quiera elegir se podrán encontrar tantos puntos G diferentes asociados a ellos. Estos puntos G se unirán a través de una línea (*ligne courbe*) que pasará por el punto A, que en el dibujo viene dada por la curva AGO; esta línea curva tiene un punto de inflexión frente al centro de AC y una asíntota BH,

13. THEOREME V. Un polygone regulier est la moitié du rectangle sous sa circonference & la perpendiculaire, qui tombe du centre sur le milieu de l'un des côtez (Ozanam, 1684: 189).

14. THEOREME VI. Un cercle est la moitié d'un rectangle sous sa circonference & son rayon (Ozanam, 1684: 191).

que es perpendicular al diámetro AB.

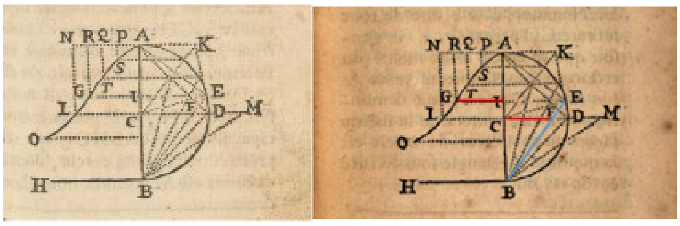


Figura 5. Dibujo para ilustrar la construcción de la curva generatriz en el Teorema VII; a la derecha, los trazos en color se han añadido al dibujo original.
Fuente: Ozanam, 1684: 193 (izquierda); elaboración propia (derecha).

Esta curva AGO se llama *cuadratriz geométrica*, porque, según Ozanam, contribuye enteramente a la cuadratura del círculo: con el diámetro AB y la asíntota BH, la curva contiene un espacio indefinido ABHO. Ozanam prueba, basándose en el Teorema I previo, que el área del espacio indefinido ABHO es el doble del semicírculo ADCB, es decir, el espacio indefinido ABHO es justamente el área del círculo de diámetro 2α.

Generación de la fórmula de cuadratura aritmética

Ya probado que el área del círculo de diámetro 2α coincide con el área de la figura ABHO, el autor pasa a ver cuánto vale cada una de las porciones de ese espacio ilimitado. Empieza analizando el área de la zona ACLGA, delimitada por los segmentos AC, CL, que son iguales, y por la curva AGL. Para encontrar dicha área, completa el cuadrado ACLN y, previamente, busca el área del complemento AGLN.

Llama $x = GI = CF$, e $y = AI$, siendo **a** el radio AC; en ese caso, el segmento BI valdrá $2\alpha - y$, y el cuadrado del segmento IE valdrá $2\alpha y - y^2$.[15]

A continuación, mediante geometría elemental, aprovechando que los triángulos BIE y BCF son semejantes, Ozanam obtiene la siguiente analogía:

$$\frac{4\alpha^2 - 4\alpha y - y^2}{2\alpha y - y^2} = \frac{\alpha^2}{x^2} \text{ ó bien } \frac{2\alpha - y}{y} = \frac{\alpha^2}{x^2}.$$ [16]

A partir de aquí, se obtiene $y = AI = \dfrac{2\alpha x^2}{\alpha^2 + x^2}$, ó bien $AI = \dfrac{2x^2}{\alpha} - \dfrac{2x^4}{\alpha^3} + \dfrac{2x^6}{\alpha^5} - \dfrac{2x^8}{\alpha^7} \cdots$

15. Usamos notación moderna, Ozanam escribe $2\alpha y - yy$; una forma de obtener el valor IE es llamar $X = CI = \alpha - y$, $Y = IE$; entonces, como $X^2 + Y^2 = \alpha^2$ será $Y^2 = \alpha^2 - (\alpha - y)^2 = 2\alpha y - y^2$.

16. Ozanam usa $::$ para expresar las proporciones del siguiente modo: $4\alpha\alpha - 4\alpha y - yy, 2\alpha y - yy :: \alpha\alpha, xx$ ó $2\alpha y - y, y :: \alpha\alpha, xx$.

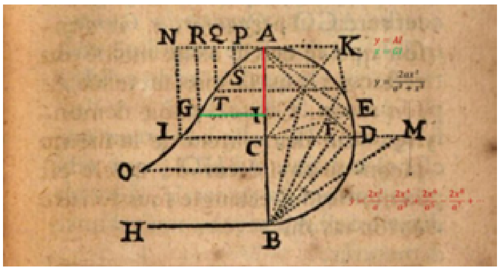


FIGURA 6. Obtención del segmento y=AI (en rojo, el segmento y su valor)
FUENTE: Ozanam, 1684: 193. Explicación gráfica propia.

De esta manera, si se divide el segmento AN en una infinidad de partes iguales en los puntos P, Q, R, etc. y se trazan las paralelas al eje AB dadas por PS, QT, RG, etc., de las que está compuesto el área del complemento AGLN, y si se llama x a la primera parte AP, se tendrá entonces AQ=2x, AR=3x, etc. Ozanam afirma que:

$$PS = \frac{2x^2}{\alpha} - \frac{2x^4}{\alpha^3} + \frac{2x^6}{\alpha^5} - \frac{2x^8}{\alpha^7} \cdots$$

$$QT = \frac{8x^2}{\alpha} - \frac{32x^4}{\alpha^3} + \frac{128x^6}{\alpha^5} - \frac{512x^8}{\alpha^7} \cdots$$

$$RG = \frac{18x^2}{\alpha} - \frac{162x^4}{\alpha^3} + \frac{1458x^6}{\alpha^5} - \frac{13128x^8}{\alpha^7} \cdots$$

etc., y así hasta llegar al último y más grande segmento, $NL = \alpha$.[17]

Empleando el Teorema IV, Ozanam encontrará la suma de todos esos segmentos PS, QT, RG… que conforman el área del complemento AGLN. Lo hará sumando por columnas: en primer lugar, todos los términos de la forma $\frac{mx^2}{\alpha}$ que aparecen en PS, QT, RG… como primer elemento de la suma (igual a $\frac{2}{3}\alpha^2$); después, restará los términos de la forma $\frac{mx^4}{\alpha}$ (igual a $\frac{2}{5}\alpha^4$); a continuación sumará la columna con los términos de la forma $\frac{mx^6}{\alpha}$ (a saber, $\frac{2}{7}\alpha^2$); etc. Así, la suma de todos estos infinitos segmentos, i.e., el área de AGLN, será igual a $\frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{2}{7}\alpha^2 - \frac{2}{9}\alpha^2$, ... A partir de esta área, Ozanam deducirá por geometría elemental, y basándose en el Teorema I, que el área de la cuarta parte ACDEA del círculo será $\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{5}\alpha^2 - \frac{1}{7}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^2 + \cdots$;

17. El segmento PS se puede ver como AI; para los segmentos QT, RG… basta sustituir x por 2x,3x…

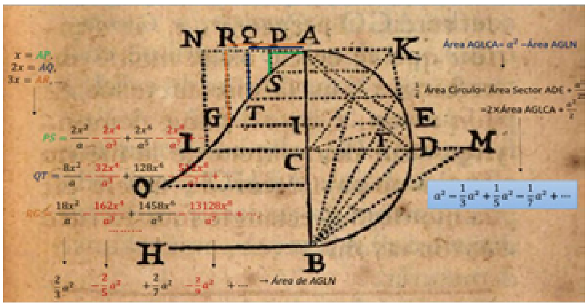


FIGURA 7. Obtención del área de la cuarta parte ACDEA del círculo.
FUENTE: Ozanam, 1684: 193. Explicación gráfica propia.

por tanto, el cuádruple de ese valor,

$$(A): \qquad 4\alpha^2 - \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{5}\alpha^2 - \frac{4}{7}\alpha^2 + \frac{4}{9}\alpha^2, \cdots,$$

será igual al área de todo el círculo; como, por el Teorema VI, esta área del círculo es igual a la mitad del área del rectángulo formado por la circunferencia y el radio $\left[\frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2 = \pi\alpha^2\right]$, se deduce que, si se divide la última expresión (A) por la mitad del radio $\left[\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\alpha\right]$, se obtendrá que $(B): 8\alpha - \frac{8}{3}\alpha + \frac{8}{5}\alpha - \frac{8}{7}\alpha + \frac{8}{9}\alpha + \cdots$ es la longitud de la circunferencia del círculo de diámetro 2α, es decir, $2\pi\alpha$.

Aplicación a la aproximación numérica de π

Del resultado anterior, Ozanam deduce de manera inmediata [usando la fórmula (B) como valor de $2\pi\alpha$] que $2\alpha/(2\pi\alpha) = 1/\pi = 1/\left(4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots\right)$.

O incluso [agrupando por parejas los términos del denominador]

$$1/\pi = 1/\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{35} + \frac{8}{99} + \frac{8}{195} + \frac{8}{323} + \frac{8}{483} + \frac{8}{675} + \cdots\right).$$

Por tanto, cuantos más términos aparezcan en el denominador, más se aproximará a la razón del diámetro de un círculo con su circunferencia. De esta expresión, Ozanam obtendrá las aproximaciones que aparecen en el enunciado del Teorema VII.

Sugerencias para una propuesta de actividades para el aula

Una vez que conocemos, a grandes rasgos, cómo procedió Ozanam para obtener la cuadratura aritmética del círculo, podríamos emplear este conocimiento para abordar diferentes tareas en el aula.

En un planteamiento general, deberíamos tener en cuenta:

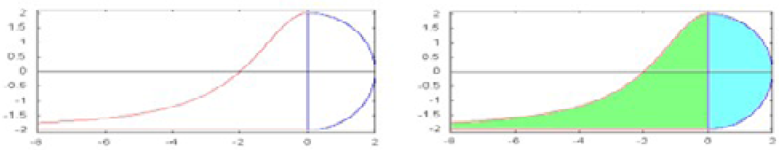
a) Alumnado al que se dirigen las actividades. Creemos que se pueden generar materiales educativos para el tramo final de educación secundaria o bachillerato, incluso para cursos de primero de carreras de ciencias.

b) Contemplar una formación humanista en el desarrollo de las actividades, sin centrarnos exclusivamente en los aspectos meramente matemáticos. Por ejemplo, se puede analizar la época y personajes contemporáneos de Ozanam. Realzar el papel de la historia de las matemáticas para salvar obstáculos en el aprendizaje.

c) Aspectos matemáticos que tratar. Entre otros, se pueden trabajar estos puntos:
(i) Geometría elemental, basada en los *Elementos* de Euclides.
(ii) Progresiones aritméticas y geométricas, con interpretación a través de sumas de líneas o figuras planas.
(iii) Geometría analítica, lugares geométricos: construir la curva generatriz y dar, incluso, una expresión analítica de ella.
(iv) Plantear problemas de cálculo infinitesimal e integral, como cálculos de área para comprobar los resultados teóricos de Ozanam (Teorema I, Teorema II).
(v) Fomentar el hábito por realizar demostraciones.
(vi) Uso de tecnologías para dibujar curvas y calcular derivadas e integrales.

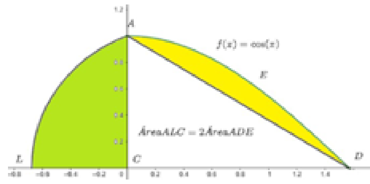
En particular, el planteamiento general puede cristalizar en las siguientes propuestas:

(1) Un apunte histórico: Arquímedes y su aproximación al número π.
(2) Encontrar el lugar geométrico descrito por la construcción de la curva generatriz: En términos actuales modernos, coincide con el dibujo de la función $x \mapsto \dfrac{A^2 - Ax^2}{A^2 + x^2}$, con $x < 0$ (curva en color rojo). [En las figuras, de elaboración propia, hemos dibujado el caso en que A=2.]



Por otra parte, si integramos la diferencia de esta curva con la curva constante $y = -A$, desde $-\infty$ hasta 0 (en color verde), encontramos $\int_{-\infty}^{0} \left[\left(\dfrac{A^3 - Az^2}{A^2 + z^2} - A \right) + A \right] dz = \pi A^2$.

(3) En relación con el Teorema I de Ozanam:



- Analizar la prueba dada por Ozanam: aspectos geométricos y paso al límite.
- Comprobar su validez con $y = 1 - x^2$ e $y = 1 - x^3$ en $[0,1]$, $y = \cos x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) En relación con la cuadratura de la parábola del Teorema II, verificar que la fórmula es correcta en el caso de la parábola $y = \lambda x(1 - x)$ de base 1, luego $x \in [0,1]$, y altura $\frac{\lambda}{4}$.

(5) Usar la cuadratura aritmética para ilustrar la idea de serie infinita como límite de sumas parciales; calcular errores absolutos y relativos en la aproximación de $\frac{\pi}{4}$; obtener la cuadratura mediante herramientas y procedimientos actuales, por ejemplo, a través de la integral definida de $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ entre 0 y 1, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$ como una suma geométrica de razón $-x^2$.

Conclusiones

La obra matemática de Jacques Ozanam (1640-1718) se desarrolló en una época de transformación de las matemáticas, motivada, entre otras, por la aplicación del análisis algebraico como método de resolución de problemas geométricos y aritméticos. Ozanam fue un autor prolífico: publicó numerosos tratados sobre matemáticas puras y mixtas, escribió un curso matemático, hizo aportaciones al *Journal des Sçavants*… Su obra matemática se caracteriza por un lenguaje matemático avanzado (comprensible para un alumno de secundaria), que relacionó geometría y álgebra, trasladando, por ejemplo, problemas puramente geométricos a relaciones algebraicas, que más tarde interpretaría como expresiones de ciertos lugares geométricos en el plano. Con su método matemático, fue capaz de obtener nuevos resultados, como en el caso de las numerosas adiciones que presentó en su manuscrito sobre la *Aritmética* de Diofanto (Gómez *et al.*, 2021).

En este trabajo, nuestro objetivo ha sido reflexionar sobre ideas históricas y apuntes didácticos conducentes a insertar la historia de las matemáticas dentro del aula, de manera que nos permita atraer la atención de los estudiantes y les permita percibir las matemáticas como una disciplina viva, en nada ajena al contexto social, así como tener una idea general de la materia que le permita superar obstáculos de aprendizaje. Como ejemplo, hemos usado fuentes primarias de Ozanam. Además de comentar algunos aspectos históricos de la fórmula aritmética del área de un círculo de diámetro 1, i.e., $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, y mostrar todos los ingredientes que utilizó Ozanam para dar la prueba, que contiene, entre otros, progresiones, tanto aritméticas como geométricas, y series infinitas, hemos realizado una propuesta para el aula en la que, además de presentar una prueba moderna, con los estándares de rigor actuales, se incluyen otras tareas para entender la prueba de la fórmula hecha por Ozanam, todo ello con el objetivo final de atraer la atención y la curiosidad de nuestros alumnos por la disciplina de las matemáticas, y facilitarles la comprensión de las rutinas de cálculo que usan hoy en día.

Referencias bibliográficas

Clark, Kathleen [*et al.*] (2018).«Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education». En: Clark, Kathleen [*et al*.] (eds). *Mathematics, Education and History. ICME-13 Monographs*. Cham: Springer, p. 1-23. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_1>.

Fontenelle, Bernard Le Bovier (1719). «Éloge de M. Ozanam ». *Historie de l'Académie Royale des Sciences*. Année MDCCXVII. París: Imprimerie Royale, p. 86-92.

Foucher De Careil, Louis Alexandre (1854). *Lettres et opuscules inédits de Leibniz. Précédés d'une introduction*. Paris: Librairie Philosophique de Ladrange.

Gómez-García, Francisco [*et al*.] (2021). «The six books of Diophantus' Arithmetic increased and reduced to specious: the lost manuscript of Jacques Ozanam (1640-1718)». *Archive for History of Exact Sciences*, 75, p. 557-611. <https://doi.org/10.1007/s00407-021-00274-3>.

Gómez-García, Francisco [*et al.*] (2023). «Jacques Ozanam: Master of the Diffusion and Algebrization of Matemathics». En: Crippa, Davide; Massa-Esteve, Maria Rosa (eds.). T*he Algebrization of Mathematics during the 17th and 18th Centuries. Dwarfs and Giants, Centres and Peripheries*. Rickmansworth (UK): College Publications, p. 25-68.

Heath, Thomas L. (1897). *The Works of Archimedes*. London: Cambridge University Press.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1676/1993). *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Eberhard Knobloch (ed.), Gotinga: Vandenhoeck & Ruprecht.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1703). «Remarque de M. Leibniz, sur un endroit des nouveaux Elements d'Algebre de M. Ozanam». *Le Journal des Savants*. París: Chez Jean Cusson, p. 362-364.

Massa-Esteve, Maria Rosa (2014). «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's Nova Scientia (1537)». *Teaching Innovations*, 27 (3), p. 114–126. <doi:10.5937/inovacije1403114E>.

Montucla, Jean-Étienne (1758). *Histoire des Mathématiques*. París: Antoine Jombert.

Ozanam, Charles-Alphonse (1879). *Vie de Frédéric Ozanam: Professeur de littérature étrangère à la Sorbonne*. París: Poussielgue.

Ozanam, Jacques (c. 1674). *Les six Livres de L'Arithmetique de Diophante d'Alexandrie augmentez et reduits à la Specieiuse*. Manuscrito no publicado.

Ozanam, Jacques (1684). *La Géométrie Pratique, contenant la trigonométrie théorique et pratique, la longimétrie, la planimétrie et la stéréométrie*. París: Estienne Michallet. <https://doi.org/10.3931/e-rara-1477>.